

「数学」 解答例

1 意図：微積分の知識を問う．積分の応用として曲線で囲まれる領域を面積を求めさせる．また，得られた数値の大小関係を問う．

解答例：

(1) $P(\alpha, \beta)$ とおく．

C_1 の接線 l は $y = ae^{a\alpha}(x - \alpha) + e^{a\alpha}$ ．

C_2 の接線 l は $y = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(x - \alpha) + \sqrt{\alpha}$ ．

係数を比較して $ae^{a\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, $e^{a\alpha} = \sqrt{\alpha}$ となる．これを解くと $\alpha = e$, $a = \frac{1}{2e}$ であり, $P(e, \sqrt{e})$ となる．

(2) $P(e, \sqrt{e})$ における接線 l は $y = \frac{1}{2\sqrt{e}}x + \frac{\sqrt{e}}{2}$ となる．このとき

$$S_1 = \int_0^e e^{\frac{x}{2e}} dx - \frac{3}{4}e^{3/2} = \frac{5}{4}e\sqrt{e} - 2e.$$

$$S_2 = \frac{3}{4}e^{3/2} - \int_0^e \sqrt{x} dx = \frac{1}{12}e\sqrt{e}.$$

(3) $S_1 - S_2 = \frac{1}{6}e(7\sqrt{e} - 12)$ ．

$$\text{ここで } (7\sqrt{e})^2 - 12^2 < 49 \cdot 2.8 - 144$$

$$= -6.8 < 0 \text{ より } 7\sqrt{e} - 12 < 0. \text{ 故に}$$

$$S_1 < S_2.$$

2 意図：確率の知識を問う．具体的には組合せの数を用いた確率の計算と期待値の極限を求めさせる．

解答例：

(1) A の要素の個数は ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ である． A から 2 つの線分をとる場合の数は ${}_{n(n-1)/2}C_2 = \frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{8}$ ． $k = 1$ となるのは A から 2 つの辺を選ぶときで，その場合の数は ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ ．故に $p_1 = {}_nC_2 / {}_{n(n-1)/2}C_2 = \frac{4}{(n+1)(n-2)}$ ．

(2) $k = 4$ となるのは 2 つの線分が端点以外で交わるとき．このとき 2 つの線分の端点を頂点とする四角形が定まる．逆に K の 4 つの頂点から定まる四角形をとるとその対角線は端点以外で交わる．つまり $k = 4$ となる場合の数は四角形の数と等しいので ${}_nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ である．したがって, $p_4 = {}_nC_4 / {}_{n(n-1)/2}C_2 = \frac{n-3}{3(n+1)}$ ．

(3) $k = 2$ となるのは 1 つが辺で，もう 1 つが対角線のときである．その場合の数は $n \frac{n(n-3)}{2}$ であるから

$$p_2 = \frac{n^2(n-3)}{2} / {}_{n(n-1)/2}C_2 = \frac{4n(n-3)}{(n-1)(n+1)(n-2)}.$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき, } p_1 \rightarrow 0, p_2 \rightarrow 0, p_4 \rightarrow \frac{1}{3}.$$

k のとりうる値は $1 \leq k \leq 4$ であるから $p_3 = 1 - p_1 - p_2 - p_4$ であり, $p_3 \rightarrow \frac{2}{3}$ となる．

以上から $E_n = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 \rightarrow \frac{10}{3}$ である．つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \frac{10}{3}$ ．

3 意図：図形の性質を用いた論証力，応用力を試す．さらに，最大値問題を問う．

解答例：

(1) 条件より $\angle BAC, \angle ABC$ は鋭角になる． C から辺 AB に垂線を下ろし，その交点を D とする． $AD = AC \cos \angle BAC$ ， $BD = BC \cos \angle ABC$ であり，仮定より $AD = BD$ ．故に $\triangle ADC \equiv \triangle BDC$ ．故に $AC = BC$ ．

(2) 三平方の定理から $QA^2 = PA^2 - PQ^2$ ， $QB^2 = PB^2 - PQ^2$ ， $QC^2 = PC^2 - PQ^2$ ． $PA = PB = PC$ より $QA = QB = QC$ ．故に Q は外心．

(3) $AC = 2$ と (1) から $AB = 4 \cos \theta$ ． $\triangle ACB$ と $\triangle APC$ は相似であるから， $PA = \frac{1}{\cos \theta}$ となる．

(4) Q は $\triangle ABC$ の外心であるから，正弦定理より $AQ = \frac{1}{\sin \theta}$ ．故に $PQ = \sqrt{PA^2 - AQ^2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}}{\sin \theta \cos \theta}$ ． $\triangle ABC = 4 \cos \theta \sin \theta$ より $V = \frac{4}{3} \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{4}{3} \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta}$ ． $1 - 2 \cos^2 \theta > 0$ より $\pi/4 < \theta < \pi/2$ に注意する．

$V/PA = \frac{4}{3} \cos \theta \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta}$ ．これを $f(\theta)$ とおく．

$f'(\theta) = \frac{4}{3} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta}} (4 \cos^2 \theta - 1)$ より $f(\theta)$ の増減を調べると $\theta = \pi/3$ で最大値 $\sqrt{2}/3$ をとる．

4 意図：不等式の証明と極限の知識を問う．特に微分を用いた不等式の証明およびその応用として数列の極限を求めさせる．

解答例：

(1) $f'(x) = \frac{1}{(1+x \tan x)^2} \geq 0$ より， $f(x)$ は単調に増加する． $g(x) = x - f(x)$ とおくと $g'(x) = 1 - \frac{1}{(1+x \tan x)^2} \geq 0$ で $g(x)$ は単調に増加する． $g(0) = 0$ であるから $g(x) \geq 0$ ，つまり $f(x) \leq x$ ．

(2) 接点は $(a_n, \cos a_n)$ であるから接線の方程式は $y = -\sin a_n \cdot (x - a_n) + \cos a_n$ ．これが $(2\pi n, 0)$ を通るから

$\cos a_n = \sin a_n \cdot (2\pi n - a_n)$ である．故に $\frac{1+a_n \tan a_n}{\tan a_n} = 2\pi n$ を得る．これから $f(a_n) = \frac{1}{2\pi n}$ となる．(1) より $\frac{1}{2\pi n} = f(a_n) \leq a_n$ である．

(3) $0 \leq x \leq \pi/4$ のとき，(1) と同様にして $\tan x \leq 2x$ がいえるので第1の不等式が成り立つ． $\tan x \geq x$ より第2の不等式が成り立つ．

(4) $c_n = \frac{1}{2n\pi} (1 + \frac{1}{n}) < \frac{\pi}{4}$ とおく． $f(x)$ は単調に増加するから， $f(c_n) \geq f(a_n) = \frac{1}{2n\pi}$ を示せばよい．そのためには (3) より $\frac{c_n}{1+2c_n^2} \geq \frac{1}{2n\pi}$ を示せば十分．左辺の分子に $c_n = \frac{1}{2n\pi} (1 + \frac{1}{n})$ を代入すると $\frac{c_n}{1+2c_n^2} \geq \frac{1}{2n\pi}$ は $2c_n^2 \leq \frac{1}{n}$ と同値である．この不等式は以下のように示される． $2c_n^2 = \frac{1}{2n^2\pi^2} (1 + \frac{1}{n})^2 \leq \frac{1}{2n^2\pi^2} \cdot 2^2 = \frac{1}{n} (\frac{2}{\pi^2 n}) \leq \frac{1}{n}$ ．

(5) (2), (4) より $\frac{1}{2\pi} \leq na_n \leq \frac{1}{2\pi} (1 + \frac{1}{n})$ となる．はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \frac{1}{2\pi}$ ．