前期日程試験

令和８年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**

3　この問題冊子の本文は，４ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせること。

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。

6　この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ aは正の実数とする。xy平面上の曲線$C_1: y = e^{ax}$と$C_2: y = \sqrt{x}\ (x \geqq 0)$は共有点Pをもち，Pにおいて共通の接線$l$をもつとする。$C_1$と$l$と$y$軸で囲まれた部分の面積を$S_1$とし，$C_2$と$l$と$y$軸で囲まれた部分の面積を$S_2$とする。

(1) aの値とPの座標を求めよ。

(2) S_1とS_2を求めよ。

(3) S_1とS_2の大小を答えよ。必要ならば$2.7 < e < 2.8$であることを用いてよい。

2 nを3以上の整数とする。正n角形Kの辺と対角線からなる線分全体の集合をAとする。Aから異なる2つの線分を選ぶと，それらの線分でKはいくつかの断片に分割される。その断片の個数をkとする。ただし，2つの線分がともに辺であればKは分割されないので$k=1$とする。Aから異なる2つの線分を無作為に選ぶとき，断片の個数がkとなる確率をp_kとする。

(1) p_1をnを用いて表せ。

(2) p_4をnを用いて表せ。

(3) 断片の個数kの期待値をE_nとする。$\lim_{n \to \infty} E_n$を求めよ。

3 空間内の同一直線上にない3点A，B，Cは$\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{BAC}=\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}$を満たすとする。A，B，Cを通る平面を$H$とする。$H$上にない点Pで$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$を満たすものをとる。点Pから平面$H$に垂線を下ろし，$H$との交点をQとする。

(1) $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$であることを証明せよ。

(2) Qは$\triangle\mathrm{ABC}$の外心であることを証明せよ。

以下では$\mathrm{AC}=2$とし，さらにPは$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{ACB}$を満たすとする。$\theta=\angle\mathrm{ABC}$とおく。

(3) PAをθを用いて表せ。

(4) 四面体PABCの体積をVとするとき，$\dfrac{V}{\mathrm{PA}}$の最大値とそのときのθの値を求めよ。

4 関数$f(x)=\dfrac{\tan x}{1+x\tan x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$を考える。

(1) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$において$f(x)$は単調に増加し，かつ$f(x) \leqq x$であることを証明せよ。

nは自然数とする。xy平面上の曲線$C : y=\cos x$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$を考える。点$(2n\pi,\ 0)$を通る$C$の接線を$l$とし，$l$と$C$の接点の$x$座標を$a_n$とする。

(2) $\dfrac{1}{2n\pi} \leqq a_n$であることを証明せよ。

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$のとき，$f(x) \geqq \dfrac{\tan x}{1+2x^2} \geqq \dfrac{x}{1+2x^2}$であることを証明せよ。

(4) $a_n \leqq \dfrac{1}{2n\pi}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$であることを証明せよ。

(5) $\lim_{n\to\infty} na_n$を求めよ。