

「数学」 解答例

解答の一例を示す．ただし計算や証明の詳細は省略した部分がある．

- 1** (1) $m = 5p + q$ ($0 \leq q \leq 4$) とする． $2m^2 + 19$ が 5 の倍数とすると $2m^2 + 19 = 50p^2 + 20p + 2q^2 + 19$ より $r(q) = 2q^2 + 19$ も 5 の倍数となるが， $r(0) = 19, r(1) = 21, r(2) = 27, r(3) = 37, r(4) = 51$ はいずれも 5 の倍数でない．ゆえに $2m^2 + 19$ は 5 の倍数でない．
- (2) $(2m^2 + 19)(7n + 5) = 70(k + 2)$ より 70 の倍数．
- (3) $2m^2 + 19$ は 2 の倍数でないから，(1) より 10 の倍数でない．ゆえに (2) から $7n + 5$ が 10 の倍数になる．また $7n + 5$ は 7 の倍数でないので $2m^2 + 19$ が 7 の倍数になる．このような m, n を順に調べると， $m = 1, 6, 8, \dots, n = 5, 15, 25, \dots$ となる．
- (i) $m = 1$ のとき．
 $n = 5$ ならば $k = 10$ であり， $n = 15$ ならば $k = 31$ となる． $n \geq 25$ のときは $k > 50$ となるので不適．
- (ii) $m = 6$ のとき．
 $n = 5$ ならば $k = 50$ となる． $n \geq 15$ のときは $k > 50$ となり不適．
- (iii) $m \geq 8$ のとき， $n \geq 5$ より $k > 50$ となり不適．以上から
 $(m, n, k) = (1, 5, 10), (1, 15, 31), (6, 5, 50)$ ．

- 2** (1) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$
 $= (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD})$ より
 $|\overrightarrow{CD}|^2 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} \dots \textcircled{1}$ ．
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ より
 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} \dots \textcircled{2}$ ．
- ①, ②より
 $|\overrightarrow{CD}|^2 = 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} \dots \textcircled{3}$ ．
 $|\overrightarrow{DA}|^2 = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} + |\overrightarrow{CD}|^2$ であるから ③より $|\overrightarrow{DA}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 = 5$ ．ゆえに $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{5}$ ．
- 同様にして $|\overrightarrow{DB}|^2 = |\overrightarrow{CB}|^2 = 4$ ．ゆえに $|\overrightarrow{DB}| = 2$ ．
- (2) $\triangle BCD$ と $\triangle ACD$ の成立条件から $0 < x < CB + CD = 4, 0 < x < CA + DA = 2\sqrt{5}$ ．以上より $0 < x < 4$ ．
- (3) 面積 S は
- $$S = \frac{x}{2} \left(\sqrt{5 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \right) \\ = \frac{x}{4} (\sqrt{20 - x^2} + \sqrt{16 - x^2})$$
- $$S' = \frac{1}{4} (\sqrt{20 - x^2} + \sqrt{16 - x^2}) \\ \times \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{20 - x^2} \sqrt{16 - x^2}} \right)$$
- $$S' = 0 \quad (0 < x < 4) \text{ より } x = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$
- 増減表より $x = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ で最大値をとる．
- (4) $\triangle ABD$ は $\angle B$ を直角とする直角三角形より $AB = 1$ ．故に四面体の高さ $AB = 1$ ．底面積は $\triangle BCD = \frac{8\sqrt{5}}{9}$ となる．ゆえに四面体の体積は $V = \frac{8\sqrt{5}}{27}$ ．

3 (1) $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log(1+x)$ とおくと
 $f'(x) = \frac{x^3}{x+1} > 0$ であるから $f(x)$ は単調増加. $f(0) = 0$ より $f(x) > 0$ ($x > 0$). ゆえに右辺の不等式が成り立つ.

同様に $g(x) = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ とおくと,
 $g'(x) = \frac{x^2}{x+1} > 0$ であるから $g(x)$ は単調増加. $g(0) = 0$ より $g(x) > 0$ ($x > 0$).
 ゆえに左辺の不等式が成り立つ.

(2) $n = 1$ のとき. (1) より

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} < x^2 f_1\left(\frac{1}{x}\right) - x < -\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2}.$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 f_1\left(\frac{1}{x}\right) - x) = -\frac{1}{2} \text{ となり } n = 1 \text{ のとき成り立つ.}$$

次に $n = k$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 f_k\left(\frac{1}{x}\right) - x) = -\frac{k}{2}$ が成り立つとして

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) - x) = -\frac{k+1}{2} \text{ が成り立つことを示す.}$$

(1) を用いて

$$\begin{aligned} x^2 f_k\left(\frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{2} (x f_k\left(\frac{1}{x}\right))^2 &< x^2 f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) - x \\ &< x^2 f_k\left(\frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{2} (x f_k\left(\frac{1}{x}\right))^2 \\ &\quad + \frac{1}{3x} (x f_k\left(\frac{1}{x}\right))^3 \text{ となる.} \end{aligned}$$

ここで $x f_k\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} (x^2 f_k\left(\frac{1}{x}\right) - x) + 1 \rightarrow 1$ ($x \rightarrow \infty$) であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) - x) = -\frac{k}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{k+1}{2} \text{ となり, } n = k+1 \text{ のときも成り立つ. 数学的帰納法により (2) が示された.}$$

4 (1) $f'(x) = \frac{-x+2}{x^3}, f''(x) = \frac{2(x-3)}{x^4}$. $f'(x) = 0$ より $x = 2$. $f''(2) = -\frac{1}{8} < 0$ より $x = 2$ で極大値 $f(2) = \frac{1}{4}$ をとる. $f''(x) = 0$ より $x = 3$ で, この前後で $f''(x)$ の符号が変わるので変曲点 $(3, \frac{2}{9})$ をもつ.

(2) l の方程式は $y = \frac{-t+2}{t^3}x + \frac{2t-3}{t^2}$ であるから, 共有点の x 座標は $\frac{x-1}{x^2} = \frac{-t+2}{t^3}x + \frac{2t-3}{t^2}$ より

$$\frac{-t+2}{t^3}x^3 + \frac{2t-3}{t^2}x^2 - x + 1 = 0$$

を満たす. (i) $t = 2$ のとき $x = 2$ となり, 共有点は P のみで, それ以外の共有点はない.

(ii) $t \neq 2$ のとき, $\frac{-t+2}{t^3}(x-t)^2(x+\frac{t}{-t+2}) = 0$ より P 以外の共有点 Q の座標は $Q(\frac{t}{t-2}, \frac{2(t-2)}{t^2})$ である. Q が C 上にあり, P と異なるためには $\frac{t}{t-2} > 0$ かつ $\frac{t}{t-2} \neq t$ のとき. この条件は $t > 2, t \neq 3$ と同値. 以上をまとめて t の条件は $2 < t < 3$ または $3 < t$.

(3) $t > 3$ として考えれば良い. このとき

$$\begin{aligned} S(t) - \log t &= \int_{t/(t-2)}^t \left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{t-2}{t^3}x - \frac{2t-3}{t^2} \right) dx - \log t \\ &= -\log \frac{t}{t-2} + \frac{-t+3}{t} + \frac{t-2}{2t} \left(1 - \frac{1}{(t-2)^2} \right) \\ &\quad - \frac{2t-3}{t} \left(1 - \frac{1}{t-2} \right) \rightarrow -\frac{5}{2} \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$