「数学」解答例

解答の概要を示し，計算や証明の詳細は省略する．

$\boxed{1}$ $f(x)$ を k 回合成したものを $f^k(x)$ と表す．$f^0(x) = x$ とする．

(1) $f^2(x) = -\dfrac{1}{x}$.

$f^4(x) = f^2(f^2(x)) = -\dfrac{1}{-1/x} = x.$

(2) $f^k(\alpha)$ は実数であることは明らか．また $\alpha \fallingdotseq 0, \pm 1$ より $f(\alpha) \fallingdotseq 0, \pm 1$ である．

(E) の左辺に $x = f(\alpha)$ を代入すると (1) を用いて

$f(\alpha) + f^2(\alpha) + f^3(\alpha) + f^4(\alpha) = f(\alpha) + f^2(\alpha) + f^3(\alpha) + \alpha = c$ となり，$f(\alpha)$ は解である．これを繰り返し適用して $f^2(\alpha)$, $f^3(\alpha)$ も解．

(3) (E) より $y_1 + y_2 = c$ である．$y_1 = \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$, $y_2 = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} - \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} = \dfrac{4\alpha}{1-\alpha^2}$ であるので $y_1 y_2 = -4$. 解と係数の関係から y_1, y_2 は $y^2 - cx - 4 = 0$ の解．

(4) $x \fallingdotseq 0, \pm 1$ より，$(E) \iff$

$(F) \quad x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0 \iff$

$(x^2 + x - 1)(x^2 - 4x - 1) = 0$ となるので解は $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $2 \pm \sqrt{5}$ である．

$\boxed{2}$ (1) $n-1$ 回連続して表のみ出て，n 回目に少なくとも一つ裏が出る場合なので

$$p_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdots \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$
$$= \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

(2) 第 n 部分和は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{k(k+1)}{2}}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$

(3) $p_n > 0$ であるから $P > p_1 + p_3 = 1/2 + 7/64 = 39/64 > 0.6$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1}$ は収束するので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}$ も収束し，その和を Q とする．

このとき $Q > p_2 + p_4 = 3/8 + 15/1024 > 0.38$ である．

(2) より $P + Q = 1$ であるから

$P = 1 - Q < 1 - 0.38 = 0.62$.

以上より $0.6 < P < 0.62$.

$\boxed{3}$

(1) 円周角の定理より $\angle \mathrm{A_2A_1A_3} = \angle \mathrm{A_4A_1A_3} = \pi/6$ であるから $\mathrm{A_1A_3}$ は $\mathrm{A_2B}$ の垂直二等分線になる．故に $\triangle \mathrm{A_3A_2}B$ は二等辺三角形で $\mathrm{A_3}B = \mathrm{A_3A_2}$. 正弦定理より $\mathrm{A_3A_2} = 1$ であるから $\mathrm{A_3}B = 1$.

(2) $\triangle \mathrm{A_1A_2A_4}$ について $\angle \mathrm{A_1} = \pi/3$ より $\mathrm{A_2A_4} = \sqrt{3}$. $\triangle \mathrm{BA_2A_4}$ について $\angle \mathrm{B} = 2\pi/3$, $\mathrm{BA_2} = a$, $\mathrm{BA_4} = b$, $\mathrm{A_2A_4} = \sqrt{3}$ である．余弦定理より $3 = a^2 + b^2 + ab$ となり， $b > 0$ より

$$b = \frac{-a + \sqrt{12 - 3a^2}}{2}.$$

(3) (2) と $b > 0$ より，$0 < a < \sqrt{3}$ である．

面積 $S = S(a)$

$= $ 台形 $\mathrm{A_1A_2A_4A_5} + \triangle \mathrm{A_2A_3A_4}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}(a + b)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{16}(a + \sqrt{12 - 3a^2})^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

$S'(a) = \dfrac{\sqrt{3}}{8}(a + \sqrt{12 - 3a^2})(1 - \frac{3a}{\sqrt{12-3a^2}}) = 0$ より $a = 1$. 増減表より $a = 1$ で最大値 $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ をとる．

$\boxed{4}$

(1) P は AB を $t + 2 : 2 - t$ に内分する点であるので $\mathrm{P}(t, -\frac{\sqrt{3}}{2}(t + 2), 0))$.

(2) 同様にして $\mathrm{Q}(t, \sqrt{3}(t + 2), 0))$, $\mathrm{R}(t, \sqrt{3}(t + 2), 3\sqrt{3}(t + 2)/2)$.

(3) $\mathrm{Q}'(t, -\sqrt{3}t, 0)$, $\mathrm{R}'(t, -\sqrt{3}t, \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - t))$.

(4) x 軸と H との共有点をを $\mathrm{T}(t, 0, 0)$ とおく．

(i) $-2 \leqq t \leqq -1$ のとき

$\mathrm{TP} \leqq \mathrm{TQ} \leqq \mathrm{TR} = \dfrac{\sqrt{39}}{2}(t + 2)$ であるから この範囲の回転体の体積は

$$V_1 = \pi \int_{-2}^{-1} \frac{39}{4}(t + 2)^2 dt = \frac{13\pi}{4}.$$

(ii) $-1 \leqq t \leqq 0$ のとき

$\mathrm{TQ}' \leqq \mathrm{TP} \leqq \mathrm{TR}' = \sqrt{\frac{15}{4}t^2 - 3t + 3}$ より この範囲の回転体の体積は

$$V_2 = \pi \int_{-1}^{0} (\frac{15}{4}t^2 - 3t + 3)dt = \frac{23\pi}{4}.$$

(iii) $0 \leqq t \leqq 2$ のとき

$\mathrm{TQ}' = \sqrt{3}t \leqq \mathrm{TR}' \leqq \mathrm{TP} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(t + 2)$ より この範囲の回転体の体積は

$$V_3 = \pi \int_{0}^{2} (\frac{3}{4}(t + 2)^2 - 3t^2)dt = 6\pi.$$

故に $V = V_1 + V_2 + V_3 = 15\pi$.