

前期日程試験

令和5年度医学科入学試験問題

数 学

〔注意事項〕

- 1 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけない。
- 2 解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。
- 3 この問題冊子の本文は、4ページからなっている。落丁、乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば、手をあげて監督者に知らせること。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は、適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は、すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 次の条件(a), (b)を満たす凸多面体を考える。

(a) 面は正三角形または正方形である。

(b) 合同な2つの面は辺を共有しない。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 一つの頂点を共有する面の数は4であることを証明せよ。
- (2) 正三角形と正方形の面の数をそれぞれ求めよ。
- (3) 正八面体を平面で何回か切断することで条件(a), (b)を満たす凸多面体を得られる。どのように切断するのか説明せよ。
- (4) (3)の切断で得られる凸多面体を F とし、 F の1辺の長さは1とする。 F のすべての正三角形の面に接する球を B とする。 B と F の共通部分の体積を求めよ。

2 関数 $f(t)$, $g(t)$ は微分可能でその導関数は連続であり, 導関数 $f'(t)$, $g'(t)$ の値は同時に 0 になることはないとする。

xy 平面上で媒介変数 t を用いて $x = f(t)$, $y = g(t)$ と表される曲線 C を考える。 C 上に点 $P(f(t_0), g(t_0))$ をとる。ただし $t \neq t_0$ ならば $(f(t), g(t)) \neq (f(t_0), g(t_0))$ を満たすとする。 P を通る直線 l を考える。 C 上に P と異なる点 $Q(f(t), g(t))$ をとり, Q から l に垂線をおろし, l との交点を H とする。ただし, Q が l 上にあるときは $H = Q$ とする。

(1) \vec{n} は大きさ 1 の l に垂直なベクトルとする。

$$|\vec{QH}| = |\vec{n} \cdot \vec{PQ}|$$

であることを証明せよ。

(2) l が P における C の接線であるための必要十分条件は, $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|\vec{QH}|}{|\vec{PQ}|} = 0$ であることを証明せよ。

3 z は 0 でない複素数とする。0 以上の整数 n に対して、 $a_n = z^n + \bar{z}^n$ とおく。
ここで \bar{z} は z と共役な複素数である。

- (1) a_n は実数であることを証明せよ。
- (2) $z = 1 + i$ とする。ただし i は虚数単位である。0 以上の整数 k に対して、
 $a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3}$ を求めよ。
- (3) 次の条件を満たす z をすべて求めよ。
条件：0 以上のすべての整数 k に対して $a_{6k} = a_{6k+2}$ である。

4 a, b は $0 < b < 1 < a$ を満たす実数とする。 xy 平面上で方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$$

で表される楕円を C とする。 C と同じ焦点をもち、点 $(b, 0)$ を通る双曲線を D とする。 C と D の共有点のうち第 1 象限にあるものを P とし、その x 座標を s とする。 C で囲まれる部分と領域 $0 \leq x \leq s$ との共通部分を K とし、直線 $x = s$ と D で囲まれる部分を L とする。 K と L を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_K, V_L とする。

- (1) s を a, b を用いて表せ。
- (2) 点 P における C の接線と D の接線は垂直であることを証明せよ。
- (3) V_K を a, b を用いて表せ。
- (4) $s = 1$ であるとき、極限 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{V_L}{V_K}$ を求めよ。