「数学」解答例

解答の概要を示し，計算や証明の詳細は省略する．

$\boxed{1}$

(1) 頂点のまわりには正三角形と正方形が同数あり交互に並んでいるので全部で偶数枚ある．2 枚では立体はできないので，4 枚以上．頂点のまわりに集まる面の展開図を考えると，頂点のまわりの角の和は 2π より小さいので 6 枚以上はありえない．ゆえに面の数は 4 である．

(2) 正三角形の数を s，正方形の数を t とする．オイラーの多面体定理より

$$s + t - (3s + 4t)/2 + (3s + 4t)/4 = 2.$$

これより $s = 8$. 正三角形と正方形の面は一つの辺を共有しているので $3s = 4t$ の関係がある．したがって $t = 6$.

(3) 正八面体の各頂点に集まる 4 つの辺の中点を通る平面は 6 枚あるが，これらの平面で切断すれば条件を満たす立体ができる．

(4) F の中心から正方形の面までの距離は $d = 1/\sqrt{2}$, 正三角形の面までの距離 r（= 球の半径）は $r = \sqrt{2/3}$ である．$d < r$ より球 B は F の正方形の面からはみ出す．それらは 6 つの同じ回転体からなるのではみ出す部分の体積 V' は

$$V' = 6\pi \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2/3}} (2/3 - x^2)dx = \left(\frac{8}{9}\sqrt{6} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\pi$$

したがって共通部分の体積 V は $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 - V' = \left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2} - \dfrac{16}{27}\sqrt{6}\right)\pi.$

$\boxed{2}$

(1) $\mathrm{H} = \mathrm{Q}$ のときは $\mathrm{QH} = 0$. また $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は l 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{n}$．ゆえに $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$. したがって等式は成り立っている．

$\mathrm{H} \fallingdotseq \mathrm{Q}$ のとき, $\overrightarrow{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のなす角を θ とする．直角三角形 PQH を考えると $|\overrightarrow{\mathrm{QH}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\,|\cos\theta| = |\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$.

(2) P を始点とするベクトル $\overrightarrow{v} = (f'(t_0), g'(t_0))$ は接線上のベクトルである．$\overrightarrow{n} = (p, q)$ とする．$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|} = \dfrac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|} = \dfrac{\left|p\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} + q\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right|}{\sqrt{\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right)^2 + \left(\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right)^2}}$ より

$$\lim_{t\to t_0} \frac{|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|} = \frac{|pf'(t_0) + qg'(t_0)|}{\sqrt{f'(t_0)^2 + g'(t_0)^2}} = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}|}{\sqrt{f'(t_0)^2 + g'(t_0)^2}}$$

となる．l が接線ならば，$\overrightarrow{v}$ は l 上にあるので $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n}$. 故に $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|} = 0.$

逆に $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|} = 0$ ならば $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n}$ となり $\overrightarrow{v}$ は l 上にある．ゆえに l は接線となる．

$\boxed{3}$ (1) $\overline{a_n} = \overline{z}^n + z^n = a_n$ より，a_n は実数．

(2) $z = \sqrt{2}\,(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$ より $z^n = 2^{n/2}\,(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4})$, $a_n = 2^{n/2+1}\,\cos\dfrac{n\pi}{4}$.

ゆえに $a_{4k} = (-1)^k 2^{2k+1}$, $a_{4k+1} = (-1)^k 2^{2k+1}$, $a_{4k+2} = 0$, $a_{4k+3} = (-1)^{k+1}2^{2k+2}$.

(3) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると $a_n = 2r^n\cos n\theta$.

$a_{6k} = a_{6k+2} \iff \cos 6k\theta = r^2\cos(6k+2)\theta = r^2\cos 6k\theta\cos 2\theta - r^2\sin 6k\theta\sin 2\theta$.

$k = 0$ のとき，

$$r^2\cos 2\theta = 1\cdots(*)$$

であるので

$$\sin 6k\theta\sin 2\theta = 0\cdots(**)$$

となる．$k = 1$ のとき，$(*)$ より $\cos 2\theta > 0$ に注意すると, $(**)$ を満たす θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ は $\theta = 0, \pi, \pi/6,\ 5\pi/6,\ 7\pi/6,\ 11\pi/6$. 逆にこれらの θ について任意の k について $a_{6k} = a_{6k+2}$ を満たす．

$\theta = 0, \pi$ のとき，$r = 1$ となり, $z = \pm 1$.

$\theta = \pi/6,\ 5\pi/6,\ 7\pi/6,\ 11\pi/6$ のとき, $r = \sqrt{2}$ となり, $z = (\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i)/2,\ (-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i)/2$.

以上より $z = \pm 1,\ (\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i)/2,\ (-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i)/2$.

$\boxed{4}$ (1) 焦点は $(\pm 1, 0)$ であり，$D : \dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{y^2}{1-b^2} = 1$ となる．C, D の交点を求めて $s = ab$.

(2) $\mathrm{P}(ab, \sqrt{(a^2-1)(1-b^2)})$ $(= (s,t)$ とおく$)$．C の接線は $\dfrac{abx}{a^2} + \dfrac{ty}{a^2-1} = 1$ で傾き $k_1 = -\dfrac{b(a^2-1)}{ta}$. D の接線は $\dfrac{abx}{b^2} - \dfrac{ty}{1-b^2} = 1$ で傾き $k_2 = \dfrac{a(1-b^2)}{tb}$.

このとき,

$$k_1k_2 = -\frac{ab(a^2-1)(1-b^2)}{t^2ab} = -1$$

となるので，2 つの接線は垂直．

(3) $V_K = \pi(a^2-1)\displaystyle\int_0^{ab}(1 - x^2/a^2)dx = \dfrac{\pi}{3}ab(a^2-1)(3-b^2)$.

(4) $ab = 1$ に注意すると

$$V_L = \pi(1-b^2)\int_b^{ab}(x^2/b^2 - 1)dx = \pi(1 - 1/a^2)\int_{1/a}^{1}(a^2x^2 - 1)dx$$
$$= \pi\frac{(a^2-1)(a^3-3a+2)}{3a^3}.$$

ゆえに $\dfrac{V_L}{V_K} = \dfrac{a^3-3a+2}{a(3a^2-1)} \to \dfrac{1}{3}$ $(a \to \infty)$.