「数学」解答例

解答の概要を示し，計算や証明の詳細は省略する．

1 (1) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおき，$\triangle$ABC の重心を G, $\triangle$DEF の重心を G$'$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ である．一方 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-t)\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = (1-t)\,\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = t\,\overrightarrow{a}$ より

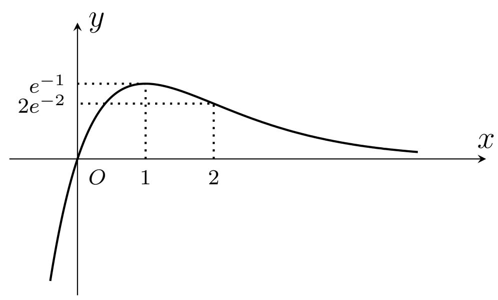
$$\overrightarrow{\mathrm{AG'}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}).$$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AG'}}$ より G $=$ G$'$． したがって重心は一致する．

(2) $\triangle\mathrm{AFE} = \triangle\mathrm{BDF} = \triangle\mathrm{CED} = t(1-t)S$ より $T = S - 3t(1-t)S = (3t^2 - 3t + 1)S$． 故に $\dfrac{T}{S} = 3t^2 - 3t + 1$．次に $\dfrac{T}{S} = 3t^2 - 3t + 1 = 3\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$ より最小値は $\dfrac{1}{4}$ $\left(t = \dfrac{1}{2}\right)$.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = (t-1)\overrightarrow{a} - (2t-1)\,\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = (2t-1)\overrightarrow{a} - t\,\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = -t\,\overrightarrow{a} + (t-1)\,\overrightarrow{b}$.
$\angle\mathrm{A} = 90^\circ$ より $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. また $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\,\overrightarrow{b}\,| = 4$.
(i) $\angle\mathrm{D} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = (2t-1)(25t-9) = 0$ より $t = \dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{25}$.
(ii) $\angle\mathrm{E} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}} = (t-1)(16-23t) = 0$ より $t = \dfrac{16}{23}$.
(iii) $\angle\mathrm{F} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = t(2t+7) > 0$ より $\triangle$DEF は直角三角形にはならない．
以上より $t = \dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{25}, \dfrac{16}{23}$.

2 (1) $x = 1$ で極大値 e^{-1} をとり，$x \leqq 1$ で単調増加，$x \geqq 1$ で単調減少．また変曲点は $(2, 2e^{-2})$ で，$x \leqq 2$ で上に凸，$x \geqq 2$ で下に凸となる。$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ に注意するとグラフの概形は以下のようになる．



(2) $x \leqq 5$ で考えればよい．$x \leqq 1$ のとき $f(x)$ は単調増加で $f(x) \leqq f(1)$. また $10 - x \geqq 9$ であり, この範囲で $f(x)$ は単調減少であるから $f(10-x) \leqq f(9)$ である. 故に $x \leqq 1$ のとき

$$f(x) + f(10-x) \leqq f(1) + f(9).$$

次に $2 \leqq x \leqq 5$ とする．
$g(x) = f(x) + f(10-x)$ とおくと $g''(x) \geqq 0$ であるから $g'(x)$ は $2 \leqq x \leqq 5$ で単調増加で

$$g'(x) \leqq g'(5) = f'(5) - f'(5) = 0.$$

ゆえに $2 \leqq x \leqq 5$ のとき $g(x)$ は単調減少であり，

$$f(x) + f(10-x) \leqq f(2) + f(8)$$

となる．最後に $f(1)+f(9)$ と $f(2)+f(8)$ を比較する．

$$f(1)+f(9)-(f(2)+f(8)) = e^{-1}(9e^{-8}+1-2e^{-1}-8e^{-7})$$
$$> e^{-1}(9e^{-8}+1-2\cdot\frac{2}{5}-8(\frac{2}{5})^7) = e^{-1}(9e^{-8}+\frac{1}{5}(1-\frac{4^5}{5^6})) > 0$$

以上より最大となるのは $(m,n)=(1,9)$ のときである．

3 (1) 条件より，赤玉が 1 個から n 個入っている箱が 1 個ずつ計 n 個ある．
渡された箱に赤玉が k 個入っているとき（その確率は $1/n$），取り出した玉について赤玉 m 個である確率は $(k/n)^m$. したがって

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m, \quad \lim_{n\to\infty} p_n = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

(2) $r_n = P(X\cap Y)$ とおく．渡された箱に赤玉が k 個入っているとき，$m+1$ 回と $m+2$ 回目で少なくともひとつ赤玉である確率は $2\dfrac{k(n-k)}{n^2}+\dfrac{k^2}{n^2}=\dfrac{2k}{n}-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$. 故に

$$r_n = P(X\cap Y) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(\frac{2k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(2\left(\frac{k}{n}\right)^{m+1}-\left(\frac{k}{n}\right)^{m+2}\right)$$

このとき，

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \int_0^1 (2x^{m+1}-x^{m+2})dx = \frac{2}{m+2}-\frac{1}{m+3}$$

$$q_n = P_X(Y) = \frac{P(X\cap Y)}{P(X)} = \frac{r_n}{p_n} \text{ より } \lim_{n\to\infty} q_n = \frac{\lim_{n\to\infty} r_n}{\lim_{n\to\infty} p_n} = \frac{(m+1)(m+4)}{(m+2)(m+3)}.$$

4 (1) オイラーの多面体定理より，辺の数 $= 2n+(2n+2)-2 = 4n$.

(2) 正三角形の 1 辺の長さを a とすると $a = 2\sin\theta$. したがって高さを h とおくと
$h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3}\sin\theta$.

(3) 三平方の定理より $H = \sqrt{h^2-(1-\cos\theta)^2} = \sqrt{2+2\cos\theta-4\cos^2\theta}$.

(4) A_n の体積 V とする．(a) の面を底面として，高さ t での断面の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = \frac{n\sin\theta}{H^2}((2\cos\theta-2)t^2+2H(-\cos\theta+1)t+H^2\cos\theta)$$

となる．したがって $\dfrac{V}{nH} = \dfrac{1}{nH}\displaystyle\int_0^H S(t)dt = \dfrac{1}{3}\sin\theta\,(1+2\cos\theta)$.

別解．A_n の底面と頂点を共有する正 $2n$ 角形を考え，それを底面とする高さ H の角柱 K_n を考える．K_n の体積は $nH\sin\theta$. K_n において，A_n の外側の部分は互いに合同な $2n$ 個の三角柱からなっている．その部分の体積は $\dfrac{2nH}{3}\sin\theta(1-\cos\theta)$. ゆえに

$$\frac{V}{nH} = \sin\theta - \frac{2}{3}\sin\theta(1-\cos\theta) = \frac{1}{3}\sin\theta\,(1+2\cos\theta).$$