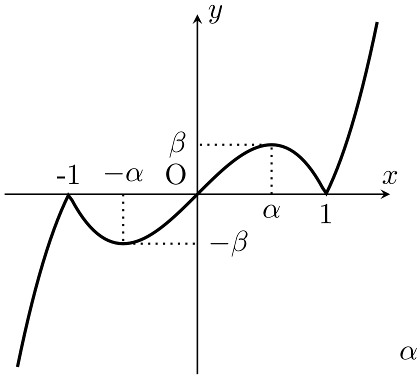
「数学」解答例

解答の方針と概要を示し，計算や証明の詳細は省略する．

$\boxed{1}$ (1)



$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \beta = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

(2) $g'(x) = f(x+r) - f(x-r) = (x+r)\left|(x+r)^2-1\right| - (x-r)\left|(x-r)^2-1\right|$ である．

$r \geq 1$ のとき，$g'(x) \geqq 0$ となるので単調増加である．

(3) $0 < r < 1$ のとき，$g'(x)$ の最小値は $4r(1-r)(2r-1)$ となるので $g'(x) \geq 0$ となるための必要十分条件は $\dfrac{1}{2} \leqq r < 1$ である．(2) とあわせて $r \geqq \dfrac{1}{2}$ となる．

$\boxed{2}$ (1) 36 通りの $A(k,l)$ のうち，要素の個数が 3 以下のものは 12 通りあるので確率は $\dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

(2) $n_1 = n(A(k_1,l_1)),\ n_2 = n(A(k_2,l_2))$，$m = n(A(k_1,l_1) \cap A(k_2,l_2))$ とおく．条件を満たす場合が起こるのは $n_1 = 6,\ n_2 = 2$ または $n_1 = 2,\ n_2 = 6$ で $m = 1$ の場合である．この場合は $24 \cdot 2 \cdot 2$ 通りあるので確率は

$$\frac{24 \cdot 2 \cdot 2}{36^2} = \frac{2}{27}.$$

$\boxed{3}$ (1) $h = \dfrac{1}{2}\sqrt{3+2a-2a^2}$.

(2) $\tan\theta_1 = \dfrac{2h}{a},\ \tan\theta_2 = \dfrac{2h}{a-1}$ である．$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = 1$ より $a^2 - a - 1 = 0$．このとき $a > 1$ より $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(注) 立体 F ができる a の条件は $1 < a < \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ である．

(3) 6 個の F をはり合わせて正十二面体ができる．F の体積は $\dfrac{a(a-1)h}{3} + \dfrac{ah}{2} = \dfrac{2a^2+a}{12}$ であるから正十二面体の体積は

$$V = a^3 + \frac{2a^2+a}{2} = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}.$$

$\boxed{4}$ A.

(1) $z^2+mz+n=0$ とする．両辺に z をかけて $z^3+mz^2+nz=0$．$z^2=-mz-n$ を代入すると $z^3+(n-m^2)z-mn=0$. したがって z は (D) を満たす．

(2) $z=\sqrt[3]{2}$ のとき $z^3-2=0$ より $\sqrt[3]{2}$ は (D) を満たす．

次に $z=\sqrt[3]{2}$ は (C) を満たすとし，$z^2+mz+n=0$ とする．このとき (1) で示したように，$z^3+(n-m^2)z-mn=0$ であるので $2+(n-m^2)z-mn=0$ となる．$n\neq m^2$ ならば $z=\dfrac{mn-2}{n-m^2}$ が有理数になり矛盾．$n=m^2$ ならば $m^3=mn=2$ となるが，このような整数 m は存在しないので矛盾．以上より $\sqrt[3]{2}$ は (C) を満たさない．

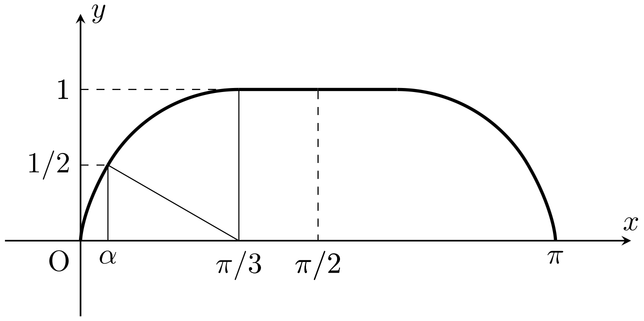
(3) $z=a+bi$ (a, b は実数) とおく．$|z|=1$ より $a^2+b^2=1$．$z^3+pz+q=0$ より $a^3-3ab^2+pa+q=0$, $b(3a^2-b^2+p)=0$ を得る．これを解いて $z=\pm1,\ \pm i,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

B.

(1) $\mathrm{OP}=\theta$ である．$0<\theta<\pi/3$ では l はサイクロイドになるので A の座標は $(\theta-\sin\theta, 1-\cos\theta)$.

(2) x 座標は K の周の長さ π に等しいので，A の座標は $(\pi, 0)$.

(3) 曲線 l はサイクロイド，円，直線の一部からなる．概形は下図の通り．



$\alpha=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

このとき面積 $S=2\left(\displaystyle\int_0^\alpha y\,dx+\sqrt{3}/8+\pi/6+\pi/6\right)=\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.