前期日程試験

令和３年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**

3　この問題冊子の本文は，４ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせること。

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。

6　この問題冊子は持ち帰ること。

1 関数$f(x)=x|x^2-1|$を考える。rは正の実数であるとして，関数$g(x)$を

$$g(x)=\int_{x-r}^{x+r} f(t)\,dt$$

と定める。

(1) $y=f(x)$のグラフの概形をかけ。

(2) $r \geqq 1$のとき，$g(x)$は単調に増加する関数であることを証明せよ。

(3) $g(x)$が単調に増加する関数であるようなrの範囲を求めよ。

2 自然数 m に対し，m を 6 で割った余りを $r(m)$ と表す。k, l は自然数とし，xy 平面上の点

$$(r(k),\ r(l)),\ (r(2k),\ r(2l)),\ \cdots\cdots,\ (r(6k),\ r(6l))$$

を要素とする集合を $A(k, l)$ とする。$A(k, l)$ の要素の個数を $n(A(k, l))$ と表す。例えば，$k=6$，$l=6$ の場合，$(r(6m),\ r(6m))=(0,\ 0)\ (1 \leqq m \leqq 6)$ なので，$n(A(6,\ 6))=1$ である。

(1) 大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げ，大のさいころの出た目を $k\ (1 \leqq k \leqq 6)$，小のさいころの出た目を $l\ (1 \leqq l \leqq 6)$ とするとき，$n(A(k,\ l)) \leqq 3$ となる確率を求めよ。

(2) 大小 2 つのさいころを投げて，大のさいころの出た目を k_1，小のさいころの出た目を l_1 とする。

さらにもう一度大小 2 つのさいころを投げて，大のさいころの出た目を k_2，小のさいころの出た目を l_2 とする。$B = A(k_1, l_1) \cup A(k_2, l_2)$ とするとき，B の要素の個数が 7 になる確率を求めよ。

3 a は $a > 1$ を満たす実数とする。1辺の長さ a の正方形である面を1つ，3辺の長さが a，1，1の二等辺三角形である面を2つ，4辺の長さが a，1，1，1の台形である面を2つ用意し，これらを組み合わせて5つの面で囲まれた立体 F ができたとする。

(1) 立体 F において，正方形の面に平行な長さ1の辺がある。その辺上の点から正方形の面に引いた垂線の長さ h を a を用いて表せ。

(2) 立体 F において，正方形の面と台形の面のなす角を θ_1 とし，正方形の面と二等辺三角形の面のなす角を θ_2 とするとき

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

となる a の値を求めよ。

(3) (2)で求めた a の場合を考える。1辺の長さが a の立方体にいくつかの F を正方形の面でうまくはり合わせると正十二面体ができる。この事実を利用して1辺の長さが1の正十二面体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$ 以下の問題**A**，**B**のうち１題を選択し，解答用紙の選択欄に**A**または**B**を記入したうえで解答すること。

A．複素数 z に関する以下の条件(C)，(D)を考える。

条件(C)　$z^2 + mz + n = 0$ を満たす整数 m，n が存在する。

条件(D)　$z^3 + pz + q = 0$ を満たす整数 p，q が存在する。

(1)　複素数 z が条件(C)を満たすならば，条件(D)も満たすことを証明せよ。

(2)　$\sqrt[3]{2}$ は条件(D)は満たすが，条件(C)は満たさないことを証明せよ。ただし，$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることは用いてよい。

(3)　$|z| = 1$ である複素数 z で条件(D)を満たすものをすべて求めよ。

B．平面上で１辺の長さが１の正三角形 ABC の頂点 A，B，C を中心とする半径１の円で囲まれた部分をそれぞれ D_1，D_2，D_3 とする。D_1，D_2，D_3 の共通部分を K とする。すなわち K は，共通部分に含まれる弧 AB，弧 BC，弧 CA で囲まれた図形である。

xy 平面上に K を考え，点 A は原点に，点 C は y 軸上に，点 B は第１象限に属するように K をおく。この K が x 軸の上で正の方向にすべることなく転がり，１回転するときにできる点 A の描く曲線を L とする。

(1)　K の弧 AB と x 軸が共有点をもつとき，その共有点を P とし，$\angle \mathrm{ACP} = \theta$ とおく。ただし $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ とする。このとき点 A の座標を θ を用いて表せ。

(2)　K が１回転したあとの点 A の座標を求めよ。

(3)　曲線 L と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。