「数学」解答例

解答の概要を示し，計算や証明の詳細は省略する．

1

(1) $l : y = \dfrac{1}{t}x + 1 - \dfrac{t^2}{2}$.

(2) l と C の P と異なる交点の x 座標 α は $\alpha = -(t + \frac{2}{t})$ である．このとき
$$S = \int_\alpha^t \left(2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{t} - 1 + \frac{t^2}{2}\right) dx$$
$= \dfrac{2}{3}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)^3$. $t + \dfrac{1}{t} \geqq 2$ より S の最小値は $\dfrac{16}{3}$ $(t = 1)$ である．

(3) 原点を通るとき $l : y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ となる．このとき回転体の体積は
$$V = 2\left\{\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx - \frac{\sqrt{2}\pi}{3}\right\} + \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi - \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{-2}\left(\frac{x^2}{2} - 2\right)^2 dx$$
$$= \left(\frac{64}{15} + 4\sqrt{2}\right)\pi.$$

2

(1) x, y の平均は $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2n+1}{2}$ であるから
$$s_{xy} = \tfrac{1}{2n}\Big\{\sum_{i=1}^{k}(i - \tfrac{2n+1}{2})(i + 2n - k - \tfrac{2n+1}{2}) + \sum_{i=k+1}^{2n}(i - \tfrac{2n+1}{2})(i - k - \tfrac{2n+1}{2})\Big\}$$
$$= \frac{1}{12}(6k^2 - 12nk + 4n^2 - 1).$$

(2) $s_{xy} \fallingdotseq\!\!\!\!/\; 0$ を示せばよい．もし $s_{xy} = 0$ であれば，(1) より $6k^2 - 12nk + 4n^2 = 1$ となり，左辺は偶数, 右辺は奇数となって矛盾する．したがって $s_{xy} \neq 0$ である．

(3) x, y の分散は $s_x^2 = s_y^2 = \frac{4n^2-1}{12}$ であり、(1) より r は $k = n$ のとき最小になる。このとき $r_n = -\dfrac{2n^2+1}{4n^2-1}$.

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n = -\frac{1}{2}$.

3

(1) $z = a + bi$ (a, b は実数) とおくと
$$-\frac{i}{2}(z - \overline{z}) = -\frac{i}{2}(2bi) = b = \mathrm{Im}(z).$$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{6}(|g_1|^2 - |g_2|^2) = -\frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) = \mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta})$.

(3) O, A, B が同一直線上にある
$\iff$ α/β は実数
$\iff$ $\alpha\bar{\beta}$ は実数（$\because \alpha/\beta = \alpha\bar{\beta}/|\beta|^2$）
$\iff$ $\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta}) = 0$
$\iff$ $|g_1| = |g_2|$（$\because$ (2)）.

(4) $\theta = \arg\dfrac{g_1}{g_2}$ とおく．$\alpha = t\beta$ (t は実数) とおけるので $\dfrac{g_1}{g_2} = \dfrac{t+\omega}{t+\omega^2}$ となる．この分母分子は互いに共役であり $\arg(\omega + t) = \dfrac{\theta}{2}$ である．このとき
A が OB を内分する
$\iff$ $0 < t < 1$
$\iff$ $-\dfrac{1}{2} < \cos\dfrac{\theta}{2} < \dfrac{1}{2}$
$\iff$ $\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \dfrac{4}{3}\pi$.

4

(1) (a) $F(x) = f(x) - f(\frac{k}{n}) - f'(\frac{k-1}{n})(x - \frac{k}{n})$ とおくと，$F'(x) = f'(x) - f'(\frac{k-1}{n}) \leqq 0$ となり，$F(x)$ は単調減少．$F(\frac{k}{n}) = 0$ より，$F(x) \geqq 0$ となり不等式 (a) が成り立つ．
(b) も同様．

(2) (a), (b) の不等式を $\frac{k-1}{n}$ から $\frac{k}{n}$ まで積分すると $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}f'(\frac{k-1}{n}) \leqq \displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$,
$\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leqq \frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}f'(\tfrac{k}{n})$.
$k = 1$ から n まで和をとり n 倍すると
$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f'(\tfrac{k-1}{n}) \leqq na_n \leqq -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f'(\tfrac{k}{n}).$$
を得る．$n \to \infty$ のとき，両辺はともに
$$-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx = -\frac{1}{2}f(1)$$
に収束する．はさみうちの原理より
$$\lim_{n\to\infty} na_n = -\frac{1}{2}f(1).$$