前期日程試験

平成31年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**

3　この問題冊子の本文は，4ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせなさい。

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。

6　この問題冊子は持ち帰ること。

1 関数$f(x)$を$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$で定める。$xy$平面上の曲線$y=f(x)$を$C$とする。0以上の整数$k$に対して，$C$上の点$(k,\ f(k))$を$\mathrm{P}_k$とおく。$n$は1以上の整数とする。

(1) 曲線Cの概形をかけ。

(2) 線分$\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k\,(k \geqq 1)$と曲線$C$で囲まれる部分の面積を$a_k$とする。$a_k$を$k$を用いて表せ。

(3) (2)のa_kに対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$とおく。$S_n$を$n$を用いて表せ。

(4) 点P_0から点P_nまでの曲線Cの長さをl_nとする。(3)のS_nに対して，$\dfrac{S_n}{l_n}$の値を求めよ。

$\boxed{2}$ aは正の実数とする。平面上に△OABがあり，辺OAの長さはa，辺OBの長さは1，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$の内積は$\dfrac{1}{2}$であるとする。さらに，点Aを通り，直線OBとOで接し，辺ABと交わる円Cがあるとする。辺ABと円Cの交点をDとする。ただし，DはA，Bと異なる点とする。△OADの内接円C_1の半径をr_1とし，△OBDの内接円C_2の半径をr_2とする。

(1) aのとり得る値の範囲を求めよ。

(2) 線分ODの長さを求めよ。

(3) r_1およびr_2をaを用いて表せ。

(4) r_1r_2が最大となるとき，aの値を求め，円C_1と円C_2は接することを証明せよ。

3 複素数平面における円 C：$|z| = 1$ を考える。複素数 z に対して，$\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(1) 円 C 上の点 α における接線を l とする。このとき l 上の点 z は等式

$$z + \alpha^2 \bar{z} = 2\alpha$$

を満たすことを証明せよ。

次に n を 3 以上の整数とし，円 C 上に n 個の点 α_1，α_2，……，α_n をとる。ただし，$\alpha_k{}^2 \neq \alpha_{k+1}{}^2$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ かつ $\alpha_n{}^2 \neq \alpha_1{}^2$ とする。点 α_k における円 C の接線を l_k $(1 \leqq k \leqq n)$ とする。l_k と l_{k+1} の交点を z_k $(1 \leqq k \leqq n-1)$ とし，l_n と l_1 の交点を z_n とする。

(2) このとき

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}$$

であることを証明せよ。

(3) $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{2n} + i \sin\dfrac{\pi}{2n}$ とする。ここで i は虚数単位を表す。

$$\alpha_k = \cos\frac{k\pi}{2n} + i \sin\frac{k\pi}{2n} \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

としたときの z_k について

$$(\alpha - 1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}$$

の値を求めよ。

4 n は2以上の整数とし，正 $2n$ 角形 K_n を考える。K_n の $2n$ 個の頂点から異なる3個の頂点を無作為に選び，それらを頂点とする三角形 T をつくる。T が直角三角形になる確率を p_n とし，T が鋭角三角形になる確率を q_n とする。

(1) p_3 と q_3 を求めよ。

(2) p_n を n を用いて表せ。

(3) q_n を n を用いて表せ。

(4) $\lim_{n \to \infty} q_n$ を求めよ。